

多介质辐射流体力学数值模拟中的并行计算研究*

莫则尧 张爱清 曹小林 左风丽

北京应用物理与计算数学研究所高性能计算中心, 北京 100088

摘要 多介质辐射流体力学是传统的计算挑战性应用问题, 对大规模并行计算机有强烈需求. 近年来, 在万亿次并行机的 512 个处理器上, 对该类应用中的多介质 Euler 流体力学方程、辐射扩散方程、粒子输运方程、以及这些方程之间的耦合连接, 开展了有效的并行数值模拟. 作为连接数值模拟和并行计算机的桥梁, 并行计算也得到了快速发展. 文中综述了并行计算, 尤其是并行算法和并行实现关键技术方面的重要进展. 通过这些算法和技术, 可以看出作者是如何组织和完成这些万亿次并行数值模拟应用的.

关键词 并行计算 数值模拟 多介质辐射流体力学 粒子输运

当前, 大规模并行数值模拟已经成为加速科学研究越来越重要的手段. 在那些实验无法开展或者实验经费非常昂贵的领域, 例如, 高能量密度物理学研究领域^[1], 这一手段尤其重要. 惯性约束聚变(ICF)^[2]是高能量密度物理学研究的一个重要领域, 其强间断非线性多物理现象的数值模拟吸引了大量的计算科学专家. 这些现象可用多介质辐射流体力学偏微分方程来近似描述. 为了在并行机上求解该类方程, 高效率的并行算法和并行实现技术非常重要. 否则, 该类应用的大规模数值模拟不可能实现^[3]. 例如, 在当前先进的微处理器上, 对二维辐射能量方程, 8000 个网格的低精度串行求解就需要 1 个星期, 而中子输运方程的 2536 个网格、44 群和 16 个方向的串行求解则需要 240 天. 况且, 将来的高精度和高分辨率数值模拟需要将这些计算规模再扩大两个数量级.

近年来, 在万亿次并行机上, 我们成功地组织了多介质辐射流体力学应用的大规模并行数值模拟, 在 512 个处理器上, 将多个数值模拟应用程序的执行速度或者问题的求解规模提高了两个数量级. 其中, 作为连接数值模拟应用和并行机的桥

梁, 并行计算研究, 或者说并行算法和并行实现技术研究, 取得了较大进展. 本文将综述这些进展, 解释我们是如何有效组织这些大规模数值模拟应用的. 特别地, 针对多介质 Euler 流体力学方程、辐射扩散方程和粒子输运方程, 以及耦合连接三类方程的并行应用程序我们分别进行了讨论. 本文给出典型的数值模拟性能结果. 所有数值模拟中, 我们均使用两台并行机, 一台是并行机 A, 含 96 个处理器, 消息传递平台 MPI 的延迟为 $2\ \mu\text{s}$, 带宽为 3.2 GB/s; 另一台为并行机 B, 含 1024 个处理器, MPI 延迟为 $10\ \mu\text{s}$, 带宽为 400 MB/s. 两台并行机的单机峰值性能均为 1 GFlops. 最后, 我们总结了一些其他相关的工作进展.

1 并行算法与并行实现关键技术进展

在 ICF 等高能量密度物理应用领域, 多介质辐射流体力学耦合粒子输运计算将占据实际数值模拟应用的绝大部分 CPU 时间^[4-6]. 一般地, 辐射流体力学由质量守恒方程、动量守恒方程和能量守恒方程 3 部分组成. 能量守恒方程通常写成电子温度、离子温度和光子温度的三温扩散方程的形式. 3 个

2005-06-28 收稿, 2005-09-05 收修稿

* 国家杰出青年科学基金(批准号: 60425205)和国家自然科学基金(批准号: 60273030)资助项目

E-mail: zeyao_mo@iapcm.ac.cn

方程相互强非线性耦合, 光子将能量传递给电子, 电子再将能量传递给离子. 特别地, 在光子温度扩散方程中, 扩散系数是光子温度的四次幂非线性函数. 对某些材料, 如果非平衡辐射效应存在, 则光子的平均自由程较长, 此时, 光子的辐射效应就不能用扩散方程, 而必须用辐射输运方程来近似, 以获得更精确的物理模型^[7]. 更进一步, 如果考虑中子反应对辐射能量的影响, 则在辐射能量方程的右端需要添加一个外源项, 并用中子输运方程来近似描述.

算子分裂技术^[4,7]通常用于将多介质辐射流体力学应用分解为 3 个部分: 多介质 Euler 流体力学方程、辐射扩散方程和粒子输运方程. 在每个时间步, 首先, Euler 流体力学方程被求解, 然后, 基于被更新的流体力学变量值, 辐射扩散方程被求解, 最后, 粒子输运方程被求解. 本质上, 求解每个方程的数值计算方法和所需的计算量均是不同的, 需要不同的并行算法和并行实现技术.

1.1 多介质 Euler 流体力学方程的并行计算进展

多介质 Euler 流体力学方程通常采用时间显格式离散, 对于单介质问题, 基于消息传递 MPI^[8,9]的并行算法和并行实现技术非常成熟. 基于众所周知的网格剖分算法^[10], 计算区域被分解为 P 个子区域, 分配给 P 个处理器. 只要分配给每个处理器的网格单元个数足够多, 则并行性能是可扩展的. 但是, 这一结论不适合多介质情形. 为了清晰地显示介质区界面, 通常采用 Lagrange 网格和任意 Lagrange—Euler(ALE)网格^[6,11]. 此时, 网格单元的计算量通常依赖于它所包含的介质类型和该单元的变形类型. 也就是说, 每个网格单元的负载随数值模拟的发展而动态变化. 这些变化将显著地导致处理器间的负载不平衡, 改变程序的 Cache 命中率, 而它们最终影响程序的并行执行时间. 典型数值测试表明^[12], 如果负载平衡问题得不到解决, 则并行效率将损失 35% 以上.

文献[10]详细总结了基于图剖分的各种静态负载平衡方法, 但是, 这些方法均要求预先知道每个网格单元的负载, 这对多介质流体力学是不可能的. 实际上, 由于多介质流体状态方程和网格变形处理的复杂性, 每个网格单元的计算量是随时间动

态变化的, 是不可能预先知道的. 为此, 我们提出了一个有效的动态负载平衡方法: 多层均权法^[13]. 该方法是一个迭代法, 它假设每个处理器中的网格单元具有同样的消费 CPU 时间的权重. 一次并行执行完成后, 用各个处理器的局部 CPU 时间除以所有处理器的 CPU 时间之和, 可得各个处理器的权重, 用该权重除以局部网格单元个数, 可得局部网格单元的平均权重; 然后, 再次均分这些网格单元, 使得各个处理器获得的局部网格单元的权重之和均等. 重复这一过程, 直到各个处理器的计算 CPU 时间收敛到满意的平衡状态. 在此基础上, 我们提出了多层均权的加速方法. 具体地, 以所有处理器为叶子结点, 构建一个二叉树型的处理器层次结构. 在该层次结构中, 每个内结点由它的两个子结点虚拟构成, 其计算能力相当于两个子结点之和. 在每次迭代开始前, 根据各个处理器的实际计算 CPU 时间, 计算各个叶子结点和网格单元的平均权重; 然后, 从叶子结点往上, 依次计算各层中结点和网格单元的权重. 权重计算完毕, 从顶层往下, 按平均权重, 依次在各层结点中重新分配网格单元. 其中, 两个叶子结点只能共享其父结点已分配的网格单元. 这样, 叶子结点的负载分配完毕, 一次迭代完成.

多层均权法是一个一维的动态负载平衡方法. 对一维动态负载不平衡问题, 理论和数值试验表明, $\beta \log P$ 次迭代通常可获得满意的负载平衡状态, 其中, P 为处理器个数, β 为 $P=2$ 时的收敛迭代次数. 对于高维动态负载不平衡问题, 通常可先利用空间填充曲线^[14], 例如 Hilbert 曲线, 重新排序所有空间网格单元, 使得在高维几何空间相邻的网格单元在一维索引空间也是尽量相邻的. 多层均权法可以直接应用于一维索引空间, 在处理器中分配网格单元. 对应地, 这些网格单元的分配就对应于高维空间的区域分解. 于是, 多层均权法就可以自动调整高维空间的负载分配, 使之达到负载平衡的状态.

通过单方向的负载调整, 在并行机 B 上, 使用数十个处理器, 多层均权法将二维多介质辐射 Euler 流体力学方程并行求解的效率提高了 25%^[13]; 应用于分子动力学模拟的动态负载不平衡问题, 将 64 个处理器并行模拟的效率也提高了 25%^[15]. 通过

与 Hilbert 空间填充曲线^[14]耦合, 使用并行机 B 的 500 个处理器, 针对三维分子动力学的 2.1×10^8 个粒子规模的模拟, 多层均权法取得了 420 倍的加速^[16], 相对于均分粒子数的负载调整方法所取得的 315 倍的加速和没有动态负载调整的 165 倍的加速, 效果非常明显。

由于多层均权法直接根据计算 CPU 时间来确定负载的平衡分配, 不依赖于其他任何静态的与应用相关的信息, 因此, 它可直接应用于异构并行计算机环境, 或者多用户状态下分时共享 CPU 资源的并行应用。通过与高效率的空间填充曲线的耦合, 该方法可以推广应用到基于网格离散的大规模并行数值模拟中。

1.2 多介质辐射扩散方程的并行计算进展

在 ALE 网格上, 紧跟多介质 Euler 流体力学方程之后, 需要求解三温能量辐射扩散方程。与流体力学方程不同, 在保证数值稳定性的前提下, 为了获得较大的时间步长, 该方程一般采用隐式格式离散时间^[17], 采用守恒型有限体积格式离散几何空间。此时, 并行算法的主要任务是求解隐式离散所得的大规模非线性方程组。

大量工作表明, 非精确 Newton 迭代或者无需 Jacobi 矩阵的 Newton 迭代^[18]是求解非线性代数方程组的最有效方法。一般地, 为了获得有效的数值收敛速度, Newton 线性化后所得的稀疏线性代数系统需要被预处理, 而预处理系统应该与应用问题特征密切相关。更进一步, 该预处理系统又可被对角尺度化^[19]、BILU^[19]、多重网格^[20]等技术预处理后, 由 Krylov 子空间迭代法^[19]求解。

相对于一般的扩散方程, 多介质辐射扩散方程更难于求解。其中的一个本质原因是, 沿辐射传播的前沿, 存在一个仅跨越十多个网格宽度的辐射突变区^[21], 在该突变区内, 辐射光子温度将突变 4 个数量级, 导致与光子温度强非线性相关的辐射扩散系统突变 22 个数量级; 另一个本质原因是, 当辐射传播跨越相邻介质界面时, 由于材料性质的不同, 扩散系数在界面处强不连续。针对单温辐射光子扩散方程, 文献[22—24]提出和比较了许多串行和并行解法器。在非结构自适应网格软件支撑平台 UG^[25]上, 我们在数百个处理器上成功求解了三温

辐射扩散方程^[21]。同时, 在文献[26, 27]中考虑了三温辐射扩散方程与 Euler 流体力学方程的并行耦合求解。特别地, 使用 0.6×10^6 个网格单元, 我们的实际应用并行机 B 的 512 个处理器上可获得 360 倍的加速^[27]。

通过以上研究, 对辐射扩散方程, 两条基本结论可以成立。(1) 在 ALE 网格上, 解法器的迭代收敛速度快于纯 Lagrange 网格, 这主要是由于 ALE 网格更光滑, 使得非线性稀疏代数系统易于求解; (2) 当网格数大于 1×10^4 以后, 为了保持解法器的强健性, 多重网格预处理^[21, 28]是非常必要的, 否则, 线性化后的稀疏线性系统将无法被快速求解; (3) 当处理器个数较多时, 多重网格预处理的并行效率有待提高。

1.3 粒子输运方程的并行计算进展

粒子输运方程是一类经典的计算挑战性应用。实际上, 只要该类方程与 Euler 流体力学方程或者能量辐射扩散方程耦合求解, 则其求解将占据整体数值模拟的 90% 以上计算量。通常按粒子输运的离散坐标方向和粒子的能群, 粒子输运方程可写成一个微分积分方程组。在满足数值稳定性前提下, 为了获得较大的时间步长, 该方程一般采用隐式格式离散时间导数。在多介质应用中, 间断有限元被证明是非常有效的一类空间离散格式^[29, 30]。隐式离散后, 方程组的求解转换为一组积分型非线性代数方程的求解。当几何网格规模较小时, 通量扫描预处理的 Richardson 源迭代法是求解该类方程组的一个有效方法^[29]; 当网格规模较大时, 为了获得强健的收敛速度, 该方程组通常采用综合扩散加速技术^[29], 并采用非精确 Newton-Krylov 子空间方法配合通量扫描预处理来快速迭代求解^[31]。无论哪种情形, 解法器的核心在于通量扫描预处理的并行计算。

基于几何网格的区域分解, 通量扫描预处理的并行计算并不容易, 因为对每个离散坐标方向, 网格通量的更新在相邻单元之间具有严格的数据依赖性, 而这种数据依赖关系可以抽象成无循环有向图。其中, 对某个给定的输运方向, 图中结点代表每个网格单元, 图中弧代表相邻两个网格单元之间的数据依赖关系。具体地, 假设通量从相邻网格边从结点 A 进入

结点 B, 则在图中加入一条弧, 由结点 A 指向结点 B. 于是, 基于有向图, 原始网格上的通量扫描并行计算就等价转换为有向图的并行计算.

在一维几何情形, 基于几何网格的区域分解, 则通量扫描是不可能并行执行的. 但是, 在高维情形, 有向图中结点的计算存在并行度, 可由众所周知的流水线并行算法充分挖掘这些并行度. 在矩形网格上, 这些流水线可被预先安排. 只要网格规模充分大, 在数千个处理器上, 均可获得很好的可扩展性能^[32-34]; 但是, 在非结构网格上, 数据依赖关系高度复杂, 流水线不可能在处理器中预先安排. Plimpton 和 Hendrickson 等^[35]首先讨论了三维 Cartesian 坐标系非结构网格上的辐射输运 Boltzmann 方程, 对 0.1×10^6 个网格单元, 80 个方向和 2 个能群的模型问题, 在 ASCI Red 并行机的 256 个结点上, 获得了 80% 的并行效率.

在二维柱坐标非结构网格上, 我们讨论了中子输运方程的求解, 提出了通量扫描并行算法^[36]. 与 Cartesian 坐标系不同, 在柱坐标系中, 不同扫描方向之间还存在数据依赖关系. 针对规模为 2536 个网格单元、44 群和 16 个方向的具体应用, 并行数值试验表明, 我们的并行算法可在并行机 A 的 92 个处理器上获得 72 倍的加速, 而在并行机 B 的 256 个处理器上, 仅能获得 80 倍的加速. 这主要是由于并行机 B 的高 MPI 延迟造成的. 另外一个大规模的应用测试表明, 在并行机 B 的 500 个处理器上, 可获得 400 倍的性能加速^[37]. 从而, 在并行机 B 上, 需要数月的串行数值模拟现在只需数小时就可以完成. 可扩展性分析^[38]表明, 通量扫描并行算法的可扩展性对并行机 MPI 延迟非常敏感; 也就是说, 粒子输运并行数值模拟适合在低延迟的并行机上开展.

除了中子输运方程, 我们还将通量扫描并行算法推广应用到二维柱对称辐射输运应用. 在该类应用中, Lagrange 网格是非协调的^[39]. 在并行机 B 的 128 个处理器上, 一个典型的应用(6400 个网格、20 群和 40 个方向)获得了 60 倍的加速.

1.4 并行连接算法

为了完成全局的并行数值模拟, 构成多介质辐射流体力学应用的 3 个不同部分, 即 Euler 流体力

学方程、能量辐射扩散方程和粒子输运方程的并行应用程序需要耦合连接在一起. 例如, Euler 流体力学需要将网格和流体状态传递给辐射扩散方程或者辐射输运方程, 后者利用这些信息更新温度, 然后将温度反馈给流体力学更新压力. 与串行连接不同的是, 并行连接需要综合考虑 3 个目标, 即各个部分之间的高效数据传递、高效的全局并行数值模拟和各个部分并行应用程序的独立开发. 但是, 由于 3 个部分使用的数值计算方法和并行算法不同, 计算粒度和区域分解方式不同, 以及最优性能的最优处理器个数不同, 使得同时满足 3 个目标的并行耦合连接变得非常困难.

近年来, 许多相关工作讨论了基于网格离散的多物理并行数值模拟中的并行耦合连接问题. 对于这些应用, 复杂物理现象被分裂为多个物理过程, 每个过程均需要不同的物理模型、数值计算方法和并行应用程序. Schloegel 等^[10]综述了相关工作, 并讨论了基于多约束多目标图剖分算法的耦合并行连接; Plimpton 等^[40]考虑了基于最小通信开销的图剖分方法, 讨论了多个网格之间的最优插值方法; Karypis 等^[41]和 Schloegel 等^[42]提出了多水平多约束多目标图剖分算法; Karypis^[43]还讨论了边沿接触检测应用中的负载平衡和通信开销之间的最优权衡. 所有这些并行算法中, 一个基本的假设前提是, 每个物理过程均使用相同个数的处理器. 这对辐射流体力学应用不太适应. 例如, 在全局数值模拟中, Euler 流体力学仅占据 1% 的计算量, 能量辐射扩散方程占据 9% 的计算量, 而粒子输运方程占据 90% 以上的计算量. 因此, 为了获得全局并行数值模拟的最优性能, 各个部分使用的处理器个数是不可能一致的. 如果简单地按计算量进行分配, 则 3 个部分使用的处理器个数之比应该为 1 : 4 : 40.

为了完成多介质辐射流体力学应用的全局并行数值模拟, 我们提出了两个并行耦合连接算法^[14]. (1) 为完全松散耦合连接算法 (FLCA), 它强调继承各个并行应用程序现有的可扩展性能以及这些程序的独立开发; (2) 为两层紧耦合连接算法 (TLC²A), 它强调以上 3 个目标的最优权衡. 原理分析和并行机 B 上 256 个处理器的数值试验表明, 两个算法均是有效的, 而后者是高度可扩展的.

2 相关工作和结论

受计算机资源和数值计算方法的限制, 惯性约束聚变(ICF)的三维全局数值模拟还无法直接开展. 但是, 某些具体物理现象仍然可以进行三维模拟. 近年来, 我们组织了两个典型三维应用的并行数值模拟. 一个是三维激光等离子体相互作用并行数值模拟^[39], 另一个为三维激光烧蚀界面不稳定性数值模拟^[45]. 对前者, 物理模型为 Maxwell 方程耦合等离子体粒子运动方程, 数值方法为经典的粒子云(CIC)网格方法. 在并行机 B 的 512 个处理器上, 我们可计算 1.1×10^8 个网格单元和 11×10^8 个粒子, 并行效率高达 82%. 6300 个时间步的全局数值模拟只需 6.3 h. 对后者, 我们需要求解三维 Euler 流体力学方程耦合电子热传导方程. 在并行机 B 的 256 个处理器上, 256 万个网格单元的数值模拟可获得 90% 的并行效率.

除了以上研究成果, 我们还提出了一套实用的应用程序并行化和性能优化技术^[46].

最近, 我们特别关注复杂应用的并行算法与并行实现技术问题, 尤其是结构自适应网格应用. 特别地, 我们将研制一个并行数值模拟支撑软件框架, 该框架将集成现有的并行算法和并行实现技术, 支持和加速先进数值计算方法的研究, 缩短并行应用程序的开发周期.

参 考 文 献

- Committee on High Energy Density Plasma Physics, et al. *Frontiers in High Energy Density Physics: The X-Games of Contemporary Science*. 2003, NAS, USA
- National Ignition Facility Program, available at <http://www.llnl.gov/nif>
- Dongarra J. *Sourcebook of Parallel Computing*. New York: Kauf Morgann Publisher, 2003
- Harlow F H. Fluid dynamics in Group T-3 Los Alamos National Laboratory. *Journal of Comput Phys*, 2004, 195: 414—433
- 李德元. 二维非定常流体力学数值方法. 北京: 科学出版社, 1998
- Wilkins M L. *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Berlin: Springer Verlag, 1999
- Bowers R L, Wilson J R. *Numerical Modeling in Applied Physics and Astrophysics*. New York: Jones and Bartlett Publishers, 1991
- Gropp W, Lusk E, Skjellum A. *Using MPI: Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface*. 2nd edition, Cambridge, MA: MIT Press, 1999
- 莫则尧, 袁国兴. 消息传递并行编程环境 MPI. 北京: 科学出版社, 2001
- Schloegel K, Karypis G, Kumar V. Graph partitioning for high-performance scientific simulations. In: Dongara J, Foster I, Fox G, et al, eds. *Sourcebook of Parallel Computing*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 2003
- Vachal P, Garimella R V, Shashkov J. Untangling of 2D meshes in ALE simulations. *Journal Comp Phys*, 2004, 196: 627—644
- 莫则尧, 符尚武. 二维三温辐射流体力学程序的并行化. *计算物理*, 2000, 17: 625—632
- Mo Z, Zhang B. Multilevel averaging weight method for dynamic load imbalance problems. *Int J Computer Math*, 2001, 76: 463—477
- Sagan H. *Space-Filling Curves*. Berlin: Springer-Verlag, 1994
- Mo Z, Zhang J, Cai Q D. Dynamic load balancing for short-range parallel molecular dynamics simulations. *Int J Computer Math*, 2002, 79: 165—177
- Cao X, Mo Z. A new scalable parallel method for molecular dynamics based on Cell-Block data structure. In: *Proceedings of IS-PA2004*, HongKong, Cao J, Yang L T, Lau F, eds. *Lecture Notes in Computer Science*, 2004, 3358: 757—764
- Brown P N, Shumaker D E, Woodward C S. Fully implicit solution of large-scale non-equilibrium radiation diffusion with high order time integration. *J Comput Physics*, 2005, 204: 760—783
- Knoll D A, Keyes D E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: A survey of approaches and applications. *Journal of Comput Phys*, 2004, 193: 357—397
- Saad Y. *Iterative methods for sparse linear systems*, 2nd edition, Philadelphia: SIAM, 2003
- Trottenger U, Oosterlee C, Schuller A. *Multigrid*. New York: Academic Press, 2001
- Mo Z, Shen L, Wittum G. Parallel adaptive multigrid algorithm for 2-D 3-T diffusion equations, *Int J Computer Math*, 2004, 81: 361—374
- Baldwin C, Brown P N, Falgout R, et al. Iterative linear solvers in a 2D radiation-hydrodynamics code: Methods and performance. *J Comput Phys*, 1999, 154: 1—26
- Rider W J, Knoll D A, Olson G L. A multigrid Newton-Krylov method for multimaterial equilibrium radiation diffusion. *J Comput Phys*, 1999, 152: 164
- Schaffer S. A semi-coarsening multigrid method for elliptic partial differential equations with highly discontinuous and anisotropic coefficients. *SIAM J Sci Stat*, 1998, 20(1): 228—242
- UG: A flexible software toolbox for solving partial differential equations, <http://cox.iwr-heidelberg.de/ug/index.html>

- 26 莫则尧, 符尚武. 求解二维三温能量方程的 Krylov 子空间迭代方法. 数值计算与计算机应用, 2003, 24(2): 133—143
- 27 莫则尧. 能量方程和中子输运方程应用程序的并行化与优化. GF 报告, ZW-J-2003233, IAPCM, 2003
- 28 肖映雄, 舒 适, 张平文等. 求解二维三温能量方程的半粗化代数多重网格算法. 数值计算与计算机应用, 2003, 24(4): 293—303
- 29 Lewis E E, Miller W F. Computational Methods of Neutron Transport. New York John Wiley & Sons Publisher, 1984
- 30 Wareing T A, McGhee J M, Morel J E, et al. Discontinuous finite element S_n methods on 3-D unstructured grids. In: Proceedings of International Conference on Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environment Analysis in Nuclear Applications, 1999, Madrid, Spain
- 31 Ardra. Scalable parallel code system to perform neutron and radiation transport calculations, <http://www.llnl.gov/ardra>
- 32 Baker R S, Alcouff R E. Parallel 3-d S_n performance for MPI on cray-T3D, In: Proc Joint Intl Conference on Mathematics Methods and Supercomputing for Nuclear Applications, 1997 1: 377—393
- 33 Baker R S, Koch K R. An S_n algorithm for the massively parallel CM-200 computer, Nucl Sci Eng, 1998, 128: 312—320
- 34 SWEEP3D: 3D Discrete ordinates neutron transport benchmark codes, http://www.llnl.gov/asci_benchmarks/asci/limited/sweep3d/sweep3d_readme.html
- 35 Plimpton S, Hendrickson B, Burns S, et al. Parallel algorithms for radiation transport on unstructured grids. In: Proceedings of Super Computing'2000, Dallas, TX, Nov 4—10, 2000
- 36 Mo Z, Fu L. Parallel flux sweeping algorithm for neutron transport on unstructured grid. Journal of Supercomputing, 2004, 30(1): 5—17
- 37 魏军侠, 傅连祥. 定常中子输运方程的并行计算. GF 报告, ZW-J-2004126, IAPCM, 2004
- 38 莫则尧. 求解中子输运方程的并行流水线算法. 计算机学报, 2004, 27(5): 587—595
- 39 张爱清, 莫则尧. 激光等离子体相互作用三维粒子云网格法程序的并行化. GF 报告, ZW-J-2002045, IAPCM, 2002
- 40 Plimpton P, Hendrickson B, Stewaert J. A parallel rendezvous algorithm for interpolation between multiple grids. In: Proceedings of Supercomputing'98, IEEE Computer Society Press, Los Alamos, CA, 1998
- 41 Karypis G, Kumar V. Multilevel algorithms for multi-constraint graph partitioning. In: Proceedings of Supercomputing'98, IEEE Computer Society Press, Los Alamos, CA, 1998
- 42 Schloegel K, Karypis G, Kumar V. A new algorithm for multi-objective graph partitioning, In: Proceedings of Euro-Par'99, 322—331, Berlin: Springer-Verlag, 1999
- 43 Karypis G. Multi-constraint graph partitioning for contact/impact computations. In: Proceedings of Supercomputing'03, Phoenix, AZ, Nov. 15—21, 2003
- 44 Mo Z. Concatenation algorithm for parallel numerical simulation of hydrodynamics coupled with neutron transport. Int J Parallel Programming, 2005, 33: 57—71
- 45 左风丽, 莫则尧, 叶文华. 三维激光烧蚀界面不稳定性程序的并行化. 数值计算与计算机应用, 2005, 26(1): 1—12
- 46 莫则尧. 应用程序并行化和优化关键技术研究. 数值计算与计算机应用, 2002, 24(2): 45—58